四川省绵阳中学高 2022 届高三第一次质量检测

理科数学 参考答案

1-6 A D D B B B　　　　7-12 B A A A D A

13.$-\frac{4}{3}$　　　14.4　　　15.[-2，2]　　　16.$\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

17.解：（1）正项等差数列$\{a_n\}$满足：$S_n^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3$，①，

当 $n=1$ 时，解得 $a_1=1$；

当 $n=2$ 时，$S_2^2=a_1^3+a_2^3$，

整理得$a_2^2-a_2-2=0$，

解得 $a_2=2$ 或-1（负值舍去），

故公差 $d=a_2-a_1=1$，

故 $a_n=n$.

（2）由（1）得：

$b_n=(-1)^n\frac{4n}{(2a_n-1)(2a_n+1)}=(-1)^n(\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)})=(-1)^n(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})$，

$\therefore T_{2n}=-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}=\frac{1}{4n+1}-1=-\frac{4n}{4n+1}$

18. 解:(1)由表中的数据可知：$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，　$\overline{y}=\frac{120+105+100+95+80}{5}=100$，

$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{1410-1500}{55-45}=-9$，　　$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=100-(-9)\times3=127$，

∴所求得回归直线方程为$\hat{y}=-9x+127$，

当 $x=10$ 时，$\hat{y}=-9\times10+127=37$，∴该小区 10 月份的对这款 *App* 不满意人数预估为 37 人；

（2）$P(27<X\le47)=P(35-2\times4<X\le35+3\times4)\approx0.9454+\frac{0.9973-0.9545}{2}\approx\frac{0.9545+0.9973}{2}=0.9759$.

(3) 提出假设H_0: 是否使用这款 *App* 与性别无关,

由表中的数据可得 $K^2=\frac{100\times(48\times18-22\times12)^2}{60\times40\times70\times30}=\frac{50}{7}\approx7.143>6.635$,

根据临界值可得,有 99%的把握认为是否使用这款 *App* 与性别有关.

19.（1）∵$SA\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，∴$SA\perp BD$.

∵底面 $ABCD$ 是正方形，∴$AC\perp BD$，又 $SA\cap AC=A$，∴$BD\perp$平面 SAC.

∵$BD\subset$平面 EBD，∴平面 $EBD\perp$平面 SAC.

（2）设 $AC\cap BD=F$，连接 SF，则易知 $SF\perp BD$，

∵$AB=2$，∴$BD=2\sqrt{2}$．大为$SF=\sqrt{SA^2+AF^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$,

∴$S_{\triangle SBD}=\frac{1}{2}BD\cdot SF=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$，

设点 A 到平面 SBD 的距离为 h，

∵$SA\perp$平面 $ABCD$，∴$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle SBD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABD}\cdot SA$，∴$6\times h=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times 4$，∴$h=\frac{4}{3}$,

∴点 A 至平面 SBD 的距离为$\frac{4}{3}$.

（3）设 $SA=a$（$a>0$），$AB=1$，以 A 为原点，AB，AD，AS 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系如图，

则 C（1，1，0），S（0，0，a），B（1，0，0），D（0，1，0），

∴$\overrightarrow{SC}=(1,\ 1,\ -a)$，$\overrightarrow{SB}=(1,\ 0,\ -a)$，$\overrightarrow{SD}=(0,\ 1,\ -a)$

设平面 SBC，平面 SCD 的法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{SC}=0\Rightarrow x_1+y_1-az_1=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{SB}=0\Rightarrow x_1-az_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=a$，则 $y_1=0$，$z_1=1$，

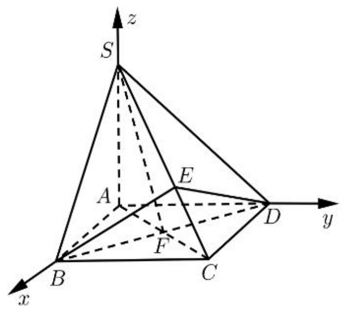
可得$\overrightarrow{n_1}=(a,\ 0,\ 1)$，同理可得$\overrightarrow{n_2}=(0,\ a,\ 1)$.

∴$cos\langle\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{1}{a^2+1}$,

要使二面角 $B\text{-}SC\text{-}D$ 的大小为 120°，

则$\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{2}$，从而 $a=1$，

即当$\frac{SA}{AB}=\frac{a}{1}=1$时，二面角 $B\text{-}SC\text{-}D$ 的大小为 120°.



20.解：（1）$f(x)=pe^x-q\cos x$，$f'(x)=pe^x+q\sin x$，

由题意得$\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=1\end{cases}$，即$\begin{cases}p-q=0\\ p=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}p=1\\ q=1\end{cases}$；

（2）$g(x)=e^x+\sin x-2x$，

∴$g'(x)=e^x+\cos x-2$，$g''(x)=e^x-\sin x$，

①当 $x<0$ 时，由 $e^x<1$，$\cos x\le 1$，则 $g'(x)=e^x+\cos x-2<0$，∴$g(x)$ 在（$-\infty$，0）上单调递减；

②当 $x\ge 0$ 时，由 $e^x\ge 1$，$\sin x\le 1$ 知 $g''(x)=e^x-\sin x>0$，∴$g'(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调递增，故 $g'(x)\ge g'(0)=0$，

∴$g(x)$ 在（0，$+\infty$）上单调递增，

∴$g(x)_{\min}=g(0)=1$；

（3）对 x 分情况讨论处理：

（i）当 $x>0$ 时，不等式 $xf(x)\ge x^3+ax^2$ 等价于 $e^x\ge x^2+ax+\cos x$，

令 $G(x)=e^x-x^2-ax-\cos x$，则 $G'(x)=e^x-2x+\sin x-a=g(x)-a$，

①当 $a\le 1$ 时，由（2）知 $G'(x)=g(x)-a>g(0)-a=1-a\ge 0$，

∴$G(x)$ 单调递增，

∴$G(x)>G(0)=0$，满足题意；

②当 $a>1$ 时，由（2）知 $G'(x)=g(x)-a=e^x-2x+\sin x-a$ 在（0，$+\infty$）上单调递增，

容易证明 $e^x\ge ex$，故 $G'(x)=g(x)-a=e^x-2x+\sin x-a>(e-2)x-1-a$，

∴$G'(\frac{1+a}{e-2})>0$，

又 $G'(0)=1-a<0$，

∴存在唯一的$x_0\in(0,\ \frac{1+a}{e-2})$，使得 $G'(x_0)=0$，

∴当 $x\in(0，x_0)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减，

∴当 $x\in(0，x_0)$ 时，$G(x)<G(0)=0$，不满足题意.

（ii）当 $x<0$ 时，不等式 $xf(x)\ge x^3+ax^2$ 等价于 $e^x\le x^2+ax+\cos x$，

当 $a\le 1$ 时，同（i）可知 $G'(x)>0$，∴$G(x)$ 上单调递增，

∴$G(x)<G(0)=0$，满足题意；

（iii）当 $x=0$ 时，对任意的 $a\in R$，原不等式成立.

综上得，a 的取值范围为（$-\infty$，1].

21.(1)由已知得 $b=4$ 且$\frac{5}{a^2}+\frac{12}{b^2}=1$,解得 $a^2=20$，

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.

（2）1.设直线 l 为 $y=k(x-2)$代入 G 得：$(4+5k^2)x^2-20k^2x+20k^2-80=0$

$\Delta>0$, $x_1+x_2=\frac{20k^2}{4+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{20k^2-80}{4+5k^2}$,$y_1y_2=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=\frac{-64k^2}{4+5k^2}$,

$t\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$

$=t(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)+(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)$

$=t(x_1x_2+y_1y_2)+x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+y_1y_2$

$=t\frac{20k^2-80}{4+5k^2}+t\frac{-64k^2}{4+5k^2}+\frac{20k^2-80}{4+5k^2}-2\frac{20k^2}{4+5k^2}+4+\frac{-64k^2}{4+5k^2}$

$=\frac{-(44t+64)k^2-(80t+64)}{5k^2+4}$ ，

若 $t\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$为定值,故$\frac{44t+64}{5}=\frac{80t+64}{4}$，解得 $t=-\frac{2}{7}$，定值为 $-\frac{72}{7}$ ，

2.当直线 l 斜率不存在时，$M(2,\frac{8\sqrt{5}}{5})$,$N(2,-\frac{8\sqrt{5}}{5})$

∴$\overrightarrow{OM}=(2,\frac{8\sqrt{5}}{5})$,$\overrightarrow{ON}=(2,-\frac{8\sqrt{5}}{5})$,$\overrightarrow{FM}=(0,\frac{8\sqrt{5}}{5})$,$\overrightarrow{FN}=(0,-\frac{8\sqrt{5}}{5})$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=4-\frac{64}{5}=-\frac{44}{5}$,$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=-\frac{64}{5}$，当 $t=-\frac{2}{7}$时，$t\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=-\frac{72}{7}$

综上所述，存在常数 $t=-\frac{2}{7}$，使得 $t\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}$为定值 $-\frac{72}{7}$.

22.解：（1）将$\rho\cos\theta=x$ 和$\rho\sin\theta=y$ 代入极坐标方程 $4\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3$ 中，

得曲线 E 的直角坐标方程为 $4x+y-3=0$;

将曲线 M 的参数方程化为$\begin{cases}x=\cos\phi\\ \frac{y}{3}=\sin\phi\end{cases}$，两式平方相加得$x^2+\frac{y^2}{9}=1$，

故曲线 M 的普通方程为$x^2+\frac{y^2}{9}=1$;

（2）将曲线 E 的直角坐标方程 $4x+y-3=0$，代入曲线 M 的普通方程$x^2+\frac{y^2}{9}=1$中，

整理得 $25x^2-24x=0$，解得 $x=0$ 或$x=\frac{24}{25}$，

当 $x=0$ 时，$y=3$；当$x=\frac{24}{25}$时，$y=-\frac{21}{25}$.

可得曲线 E 与 M 的两交点坐标为（0，3）和$\left(\frac{24}{25},\ -\frac{21}{25}\right)$.

23.解：（1）设 $m=x^2$，则 $m\geq 0$，

∴不等式 f（x）＜5 可化为$|2m-1|+|m-5|<5$，

等价于$\begin{cases}0\leq m\leq\frac{1}{2}\\1-2m+5-m<5\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<m\leq 5\\2m-1+5-m<5\end{cases}$或$\begin{cases}m>5\\2m-1+m-5<5\end{cases}$，

解得$\frac{1}{3}<m\leq\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<m<1$，或 $m\in\emptyset$，

即$\frac{1}{3}<m<1$，

∴$\frac{1}{3}<x^2<1$，解得$-1<x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{3}}{3}<x<1$，

∴f（x）＜5 的解集为$\left(-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$；

（2）$x\in[1,+\infty)$时，$f(x)=2x^2-1+|x^2-5|$，

当 $1\leq x\leq\sqrt{5}$时，$f(x)\geq tx$ 等价于$(2x^2-1)+(5-x^2)\geq tx$，

即 $x+\frac{4}{x}\geq t$，

又 $x+\frac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=2$ 时取“=”，

∴$t\leq 4$；

当 $x>\sqrt{5}$时，$f(x)\geq tx$ 等价于$(2x^2-1)+(x^2-5)\geq tx$，

即 $3x-\frac{6}{x}\geq t$，

又 $y=3x-\frac{6}{x}$在 $x\in(\sqrt{5},+\infty)$上单调递增，

∴$3x-\frac{6}{x}>3\sqrt{5}-\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$，

∴$t<\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

综上知，实数 t 的取值范围是 $t\leq 4$．即 t 的取值范围是$(-\infty,\ 4]$.